数理解析研究所講究録
527巻 1984年 95-110

Multiplicative System and Generalized Takagi Functions

京大教養　河野　敬雄　(Norio Kôno)

§1. Introduction. Weierstrass は、到るところ微分不可能な連続関数が存在し得ることを示して当時(1875年)の数学界にセンセーションを巻きおこした。彼の例は，フーリエ級数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x, \quad 0<a<1, \quad ab>1+\frac{3}{2}\pi$$

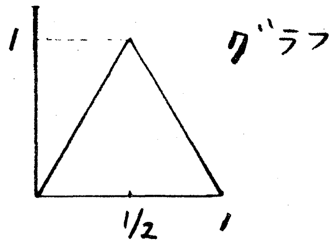
で定義される。但し，b は奇数である。この場合の微分可能性は，微係数として $+\infty$ 又は $-\infty$ を許している。もし有限な微係数が到るところ存在しないという意味であれば，$ab \geq 1$ の条件で十分であることを Hardy が示している [9]。これは，$f(x)$ を形式的に微分してみると

$$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}(ab)^n \pi \sin b^n \pi x$$

から予想され得ることである。

その後このような関数については多くの数学者の興味を引き数学に対する認識が深まったのであるが，高木貞治は1903年に，到るところ有限な微係数をもたない連続関数の簡単な例を与えた。彼の例は次のようなものである。

$$\varphi(x) = 2x, \quad \text{if } 0 \le x \le \frac{1}{2}$$
$$= 2(1-x), \quad \text{if } \frac{1}{2} \le x \le 1.$$



と定義する。φは$[0,1]$から$[0,1]$の上への連続関数であるから，いく度でも合成写像を定義することができる。それを，$\varphi^{(n)}$とする。つまり，$\varphi^{(0)}=\varphi$, $\varphi^{(n)}=\varphi(\varphi^{(n-1)})$, $n=1,2,\cdots$。$\varphi^{(n)}$は又，次のように定義することもできる。今，φを周期関数として実数軸上の関数に拡張すると，$\varphi^{(n)}(x)=\varphi(2^{n-1}x)$である。この時，高木は

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varphi^{(n)}(x)$$

で定義される連続関数は到るところ有限な微係数を持たないことを示した。

最近，Hata-Yamaguti [2, 3] は，高木の関数の一般化を微分又は差分方程式の立場から解析し，種々の結果を得ている。我々は，これを確率論的立場から解析したい。

§2. Multiplicative System.

まず，確率空間として $[0,1]$ 上のルベーグ測度をとる。以後，a.s. (almost sure) 等の確率論的用語はこの確率空間に関するものとする。従って $\{\varphi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は，この確率空間で定義された確率変数とみなすことができる。そうすると，平均 $\int_0^1 \varphi^{(n)}(x)dx$ は $\frac{1}{2}$ である。そこで平均 0 の確率変数を考える方が自然であつかいやすいから，

$$\varphi_*^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) - \frac{1}{2}, \quad n=1,2,\cdots$$

とおく。$\{\varphi_*^{(n)}\}$ はどのような確率変数列であろうか。今，点 $x \in [0,1)$ を2進展開で表わす。即ち，

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-k}, \quad \varepsilon_k = 0 \text{ 又は } 1.$$

連続関数又は a.s. の話をしている限り，表現の一意性は問題にならないが，後に影響のある場合もあるので，例えば，$\sum_{k=\ell+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-\ell}$ は，右辺で表わすことにする。そうすると $\varepsilon_1 = 0$ の時 $\varphi(x) = 2x$ であるから

$$\varphi_*(x) = -\sum_{k=2}^{\infty} (1-2\varepsilon_k)2^{-k}$$

又，$\varepsilon_1 = 1$ の時は，$\varphi(x) = 2-2x$ であるから，

$$\varphi_*(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (1-2\varepsilon_k)2^{-k}$$

と表わされる。Rademacher の関数 $X_n(x) = 1-2\varepsilon_n$ を導入すると，結局 $x \in [0,1)$ に対して

(2.1) $$\varphi_*(x) = -X_1(x)\sum_{k=2}^{\infty} X_k(x)2^{-k}$$

と表わされる。一般の n に対しては

(2.2) $$\varphi_*^{(n)}(x) = \varphi_*(2^{n-1}x)$$

を用いて，（$\varphi_*(x)$ も周期関数として実軸上の関数に拡張しておく。）

(2.3) $$\varphi_*^{(n)}(x) = \varphi_*\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{k+n-1}2^{-k}\right)$$

$$= -X_n(x)\sum_{k=2}^{\infty} X_{k+n-1}(x)2^{-k}$$

$$= -2^{n-1}X_n(x)\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k(x)2^{-k}$$

と表わされる。この表現から直ちに次の定理を得る。

定理1 (i) $\{\varphi_*^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は Multiplicative System をなす。即ち，

任意の正整数 r と, $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$ に対して

$$\int_0^1 \varphi_*^{(n_1)} \cdots \varphi_*^{(n_r)}\, dx = 0 .$$

(ii) $$\int_0^1 |\varphi_*^{(n)}|^2\, dx = \frac{1}{12}$$

(iii) $$\int_0^1 |\varphi_*^{(n)}|^2 \varphi_*^{(n_1)} \cdots \varphi_*^{(n_r)}\, dx = 0 \quad \text{if}$$

$$n \geq \min(n_1, \cdots, n_r)$$

$$= (-1)^r 2^{-2(n_r - n + 1)}/3 \quad \text{if}$$

$$n < n_1 < \cdots < n_r$$

(iv) $$\frac{1}{24} \leq \int_0^1 |\varphi_*^{(n)}|^2 \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + \eta_k \varphi_*^{(n+k)})\, dx \leq \frac{1}{8}$$

ここで, $\eta_k = 1$ 又は -1 .

(V) E をルベーグ測度正のボレル集合とすると, 正数 c が存在して, すべての n に対して

$$\int_E |\varphi_*^{(n)}|^2\, dx \geq c .$$

(v) の証明には $\varphi^{(n)}(x)$ の分布が n に無関係にルベーグ測度であることを用いる必要がある。

さて, Multiplicative system の種々の定義（必ずしも同値でない）は Alexits [1] の本に導入してあるが, Móricz [4] は最も弱い定義（Weakly Multiplicative System）の下で, L^2-収束から概収束が従う等独立確率変数列に対して成立する定理の拡張に成功した。我々の場合に適用すると, 次の結果を得る。但し(iii)は彼らの方法をまねて, 定理1の(iv)を用いて独自に証明する必要がある。

<u>定理2</u> (i) $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<+\infty$ ならば,

$$f_*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_*^{(n)}(x)$$

は概収束する。（勿論 L^2 収束している）

(ii) ルベーグ測度正をもつボレル集合 E が存在して, E の上で $\left\{\sum_{n=1}^{m}c_n\varphi_*^{(n)}(x)\right\}_{m=1}^{\infty}$ が一様有界, 又は上の $f_*(x)$ が有界ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<+\infty .$$

(iii) 区間 I があって，次の条件のうちの1つが成立すれば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$$

である。条件とは

(a) $\left\{\sum_{n=1}^{m} c_n \varphi_*^{(n)}(x)\right\}_{m=1}^{\infty}$ が I 上で上から（又は下から）一様に有界，

(b) $f_*(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_*^{(n)}(x)$ が I 上で概収束して，本質的に上から（又は下から）有界，

(c). $f_*(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_*^{(n)}(x)$ が I 上のすべての点で収束。

勿論，$\{c_n\} \in \ell^1$ ならば $f_*(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_*^{(n)}(x)$ は絶対収束して連続関数を定義するから，上記3条件はことごとく満される。

次に，関数列 $\{\varphi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ で展開した場合を考える。$\varphi^{(n)}$ は $\varphi_*^{(n)}$ と定数しか違わないから上記定理の系として次のことがいえ，Hata-Yamaguti [3] の結果の別証をも与えている。

系　区間Iがあって，次の条件のうち1つが成立すれば $\{c_n\} \in \ell^1$ である。条件とは

(a) $\left\{\sum_{n=1}^{m} c_n \varphi^{(n)}(x)\right\}$ は I上で一様有界である。

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^{(n)}(x)$ は I上のすべての点で収束する。

§3. Generalized Takagi Functions.

この§では $\{\varphi_*^{(n)}\}$ 又は $\{\varphi^{(n)}\}$ で展開される連続関数を考える。両者は定数の違いしかないから以下では

$$(3.1) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^{(n)}(x) \quad , \quad \{c_n\} \in \ell^1$$

を考える。$c_n = 2^{-n}$ の時が高木の関数であったわけである。

<u>定理3</u>．(3.1) の関数を考える。この時

(i) $\{2^n c_n\} \in \ell^2 \iff f(x)$ は絶対連続 で導関数は

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n X_n(x) \quad a.s.$$

で与えられる。ここで $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は Rademachの関数。

(ii) $\{2^n c_n\} \notin \ell^2$ かつ $\lim_{n\to\infty} 2^n c_n = 0 \iff$

$f(x)$ はほとんど到るところ微分不可能であるが，連続濃度の集合上で微分可能で，微係数の値はすべての実数値を取り得る。従って，この関数は singular である。

(iii) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ 2^n|c_n| > 0 \iff$ $f(x)$ は到るところ有限な微係数をもたない。

この定理からわかるように $f(x)$ はほとんどの場合なめらかな関数を表わしてはいない。くわしくいうと，連続関数 $f(x)$ が Zygmund の意味で smooth であるとは $\forall x \in (0,1)$ に対して

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = o(h)$$

が成立する時をいう。[6]. generalized Takagi 関数の場合，smooth であるのは次の場合に限る。

<u>定理 4.</u> 関数 (3.1) が smooth であるならば $f(x) = ax(1-x)$ と表わされる。

次に，関数 (3.1) の連続性の程度について調べよう。一般に，連続性の上からの評価は

$$|f(x+h)-f(x)| \leq |h| \sum_{n=1}^{n(h)} 2^n |c_n| + \sum_{n>n(h)} |c_n|$$

で表わされる。ここで $n(h)$ は $\log_2 1/h$ の整数部分を表わす。一方，確率論でよく知られているように，Brown 運動の path の連続性はくわしく調べられている。その類似を考えると次の定理を得る。

<u>定理5</u>　$\{2^n c_n\} \notin l^2$ かつ，$K>0$ があって $2^n|c_n| \leq K$ がすべての n に対して成立する時，

(uniform modulus continuity)

(i) $$\overline{\lim_{|x-y|\downarrow 0}} \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)\,\sigma_u(|x-y|)} = 1 \quad \text{かつ}$$

$$\underline{\lim_{|x-y|\downarrow 0}} \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)\,\sigma_u(|x-y|)} = -1 .$$

ここで $\sigma_u(h)$ は

$$\sigma_u(2^{-p}) = \sum_{n=1}^{p} 2^n |c_n|$$

を満す単調非増加関数.

(local mudulus of continuity)

(iii) ほとんど到るところの x に対して

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h\,\sigma_e(|h|)\sqrt{2\log\log 1/\sigma_e(|h|)}} = 1 \quad \text{かつ}$$

$$\underline{\lim_{h\to 0}}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h\,\sigma_e(|h|)\sqrt{2\log\log 1/\sigma_e(|h|)}} = -1,$$

ここで $\sigma_e(h)$ は

$$\sigma_e(2^{-p}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{p} 2^{2n}|c_n|^2}$$

を満す単調非増加関数。

<u>定理3～5の証明のoutline.</u> 点 x と $x+h$ を2進展開で表わす。即ち,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-k}, \quad x+h = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon'_k 2^{-k}.$$

ここで $2^{-p-1} < h \leq 2^{-p}$ を満す整数 p を定める。次に

$$k_0 = \max\{k;\ \varepsilon_1 = \varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon_k = \varepsilon'_k\}$$
$$= 0 \quad \text{if } \{\ \} = \phi$$

とおく。2進展開において $\sum_{k=q+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-q}$ を右辺で表わすことにすると, $h \downarrow 0$ の時 $k_0 \uparrow +\infty$ となる。

この時，次の Lemma を得る。

Lemma 1. (i) $0 \leq k_0 \leq p$,

(ii) $\varepsilon_{k_0+1} = 0$, $\varepsilon'_{k_0+1} = 1$,

(iii) もし $k_0+2 \leq p$ ならば，$k_0+2 \leq k \leq p$ に対して $\varepsilon_k = 1$, $\varepsilon'_k = 0$ である。

この Lemma と (2.3) を合せると次の Lemmas を得る。

Lemma 2.

$$f(x+h) - f(x) = h\sum_{n=1}^{k_0} 2^n c_n X_n(x) +$$

$$\left\{\sum_{k=p+1}^{\infty}(1-\varepsilon'_k-\varepsilon_k)2^{-k}\right\}\sum_{n=k_0+1}^{p} 2^n c_n X_n(x) +$$

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} 2^{n-1} c_n \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(X_n(x)X_k(x) - X_n(x+h)X_k(x+h)\right)2^{-k}.$$

Lemma 3. 特に $2^n|c_n| = O(1)$ ($o(1)$ resp.) ならば，Lemma 2 の第3項は $O(h)$ ($o(h)$ resp.) である。

Lemmas の証明は初等的であるから省略する。

§ Miscellany.

B.B. Mandelbrot の本[8] をながめていると，到るところ微分不可能な関数を逐次グラフを描いて構成する方法が図示してある。この時重要なことは scaling 又は相似ということである。彼の本の389～390頁に述べてある Weierstrass関数（少し modify してある）に対する scaling property の考え方を我々の場合に応用すると，$\frac{1}{2}<t<1$ に対して

$$f_t(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} t^n \varphi(2^{n-1}x) \quad , \quad 0\le x\le 1$$

とおく。t の条件からこれは収束して連続関数を与える。

$$f_t(x)=\frac{2t}{2t-1}x+\sum_{n=1}^{\infty} t^n \varphi^{(n)}(x)$$

と表わされ，$2^n t^n > 1$ であるから到るところ微分不可能である。この関数はある意味で scaling property を持つ。つまり，$a=2^{-k}$, $k\in\mathbb{N}$ に対して，

$$f_t(ax)=\sum_{-\infty}^{\infty} t^n \varphi(2^{n-k-1}x)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+h} \varphi(2^{n-1}x)$$

$$= a^{\log_2 1/t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n} \varphi(2^{n-1}x)$$

$$= a^{H} f_t(x), \qquad H = \log_2 1/t \quad 。$$

又、この関数の Hölder 連続性は定理4の後に書いたように、簡単に計算できて

$$|f_t(x+h) - f_t(x)| \leq K h^{H}$$

となる。この上からの評価によって、$f_t(x)$ のグラフ $G_t = \{(x, f_t(x)) ; 0 \leq x \leq 1\}$ の Hausdorff 次元は $2-H$ 以下であることがわかる。下からの評価はむつかしくて、現在証明されていないように思われるが、フラクタル次元（$= \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \log N_\varepsilon(G_t) / \log 1/\varepsilon$）は $2-H$ 以上であることは比較的簡単にわかる。ここで $N_\varepsilon(G_t)$ は半径 ε の円板で G_t を覆った時の最小個数。又、レベル集合 $G_x = \{0 \leq y \leq 1 ; f_t(y) = x\}$ の Hausdorff 次元もほとんど到るところの x に対して 0 でないと思われる。無責任な予想を述べると $1-H$ ではなかろうか。理由は、まったくの類似であるが、確率過程の self-similar process を考える。確率過程 $\{X(t,\omega),\ 0 \leq t < \infty\}$ が self-similar であるとは

(i) $X(0,\omega)=0$ a.s.

(ii) $\exists H>0$ $\forall a$ に対して, $\{X(at,\omega)\}$ と $\{a^H X(t)\}$ の有限次元分布が等しいことである。

この時, わずかな仮定（必ずしも fractional Brown 運動でなくてもよい）の下で, path $\{(t, X(t,\omega))\}$ の Hausdorff 次元は $2-H$ （但し $0<H<1$ を仮定）であることがわかる。（未発表）　又, fractional Brown 運動の場合は, レベル集合の Hausdorff 次元は $1-H$ であることが知られている（Marcus）からである。

1984年 4月 23日

References

[1] G. Alexits, Convergence of orthogonal series, Pergamon Press-Akademiai Kiado(Budapest, 1961).

[2] M. Hata and M. Yamaguti, Weierstrass's function and chaos, Hokkaido Math. J. 12(1983), 333-342.

[3] ________________________, On Takagi's nowhere differentiable function, pre-print.

[4] F. Móricz, On the convergence properties of weakly multiplicative systems, Acta Sci. Math. 38(1976), 127-144.

[5] T. Takagi, A simple example of the continuous function without derivative, Phys.-Math. Soc. Japan, 1(1903), 176-177. The Collected Papers of T. Takagi, edited by S. Kuroda, Iwanami(1973), 5-6.

[6] A. Zygmund, Smooth functions, Duke Math. J. 12(k945), 47-76.

[7] N. Kôno, On generalized Takagi functions, pre-print.

[8] B.B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature, W.H.Freeman and Company San Francisco, 1982,

[9] G.H. Hardy, Weierstrass's non-differentiable function, Trans. Amer. Math. Soc. 17(1916),301-325.